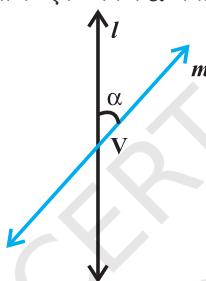
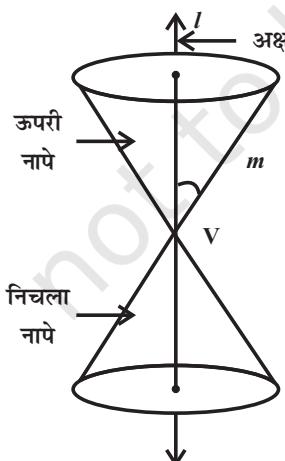
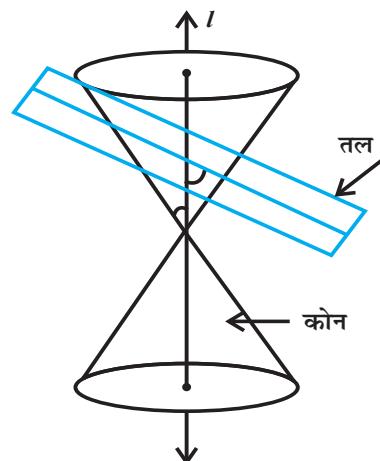
अध्याय 11

11.1 समग्र अवलोकन (Overview)

11.1.1 *शंकु के परिच्छेद (Sections of a cone)*

मान लीजिए कि l एक स्थिर उर्ध्वाधर रेखा है और m एक दूसरी रेखा है जो इस रेखा को स्थिर बिन्दु V पर प्रतिच्छेद करती है और इसके साथ एक कोण α बनाती है। (आकृति 11.1).

आकृति 11.1

अब हम रेखा m को रेखा l के परित: इस प्रकार घुमाते हैं कि m की सभी स्थितियों में कोण α अचर रहता है। इस प्रकार उत्पन्न पृष्ठ एक लंब वृतीय खोखला द्विशंकु है जिसे हम अब से शंकु ही कहेंगे और ये दोनों दिशाओं में अनिश्चित दूरी तक बढ़ रहा है। (आकृति 11.2)

आकृति 11.2 **आकृति 11.3**

बिन्दु V को शीर्ष कहते हैं और स्थिर रेखा l शंकु का अक्ष कहलाती है। घूमने वाली रेखा m शंकु की जनक कहलाती है। शीर्ष शंकु को दो भागों में विभक्त करता है जिन्हें नापे (Nappes) कहा जाता है।

यदि हम एक तल और शंकु का परिच्छेद लेते हैं तो इस प्रकार प्राप्त परिच्छेद एक, शंकु परिच्छेद कहलाता है। अत: शंकु परिच्छेद ऐसे वक्र हैं जिन्हें एक लम्बवृतीय शंकु और एक तल के परिच्छेदन से प्राप्त किया जाता है।

शंकु के उर्ध्वाधर अक्ष और परिच्छेदी तल के बीच बने कोण और परिच्छेदी तल की स्थितियों के अनुसार विभिन्न प्रकार के शंकु प्राप्त होते हैं। मान लीजिए परिच्छेदी तल, शंकु के उर्ध्वाधर अक्ष के साथ β कोण बनाता है (आकृति 11.3) तल का शंकु के साथ परिच्छेदन या तो शंकु के शीर्ष पर हो सकता है या नापे के दूसरे किसी भाग पर ऊपर या नीचे हो सकता है। तब तल, शंकु के नापे (शीर्ष के अतिरिक्त) को काटता है तो हमें निम्नांकित स्थितियाँ प्राप्त होती हैं-

(a) जब $\beta = 90^o$, तो परिच्छेद एक वृत होता है।

(b) जब $\alpha < \beta < 90^o$, तो परिच्छेद एक दीर्घवृत्त होता है।

(c) जब $\beta = \alpha$ तो परिच्छेदा एक परवलय होता है।

[*उपरोक्त तीनों परिस्थितियों में तल शंकु के एक नापे को पूर्णत: आर-पार काटता है।*]

(d) जब $0 \leq \beta < \alpha$; तो तल शंकु के दोनों नेप्स को काटता है और परिच्छेद वक्र अतिपरवलय होता है। वास्तव में, ये वक्र, आजकल बाहरी अंतरिक्ष के अन्वेषण और परमाणु कणों के व्यवहार की खोज के लिए महत्वपूर्ण साधन है।

हम शंकु परिच्छेदों को तलीय वक्रों के रूप में लेते हैं। इस उद्देश्य के लिए अन्य समान परिभाषा का उपयोग सुविधाजनक है जो केवल उस तल से सम्बन्ध जोड़ती है जिसमें वक्र स्थित हैं और इस तल में विशिष्ट बिन्दुओं एवं रेखाओं, जिन्हें नाभियां एवं नियंताएं कहते हैं, के साथ सम्बन्ध जोड़ती है। इस उपगमन के अनुसार परवलय, दीर्घवृत्त एवं अतिपरवलय को तल के एक निश्चित बिन्दु (जिसे नाभि कहा जाता है) और एक निश्चित रेखा जिसे नियता कहा जाता है) की सहायता से परिभाषित किया जाता है।

यदि, S नाभि और l नियता हैं, तो तल के ऐसे सभी बिन्दुओं का समुच्चय जिनकी बिन्दु S से दूरी, रेखा l से दूरी के साथ एक अचर अनुपात (e) धारण करती है, शंकु परिच्छेद कहलाता है। अचर अनुपात (e) को उत्केंद्रता कहते हैं। दीर्घवृत्त के विशिष्ट स्थिति के रूप में हमें वृत्त प्राप्त होता है जिसके लिए (e) का मान शून्य होता है और इसलिए इसका अध्ययन हम विभिन्न विधि से करते हैं।

11.1.2 वृत्त (*Circle*):

वृत्त, तल के उन सभी बिन्दुओं का समुच्चय होता हैं जो तल के एक स्थिर बिंदु से एक निश्चित दूरी पर होते हैं। स्थिर बिन्दु को वृत्त का केंद्र कहते हैं और वृत्त पर किसी भी बिंदु की केंद्र से दूरी वृत्त की त्रिज्या कहलाती है।

केंद्र (h, k) तथा त्रिज्या r के वृत्त का समीकरण $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ है।

आकृति 11.4

वृत्त का व्यापक समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, जहाँ g, f और c अचर हैं।

(a) इस वृत्त का केंद्र $(-g, -f)$ है।

(b) इस वृत्त की त्रिज्या $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$ है।

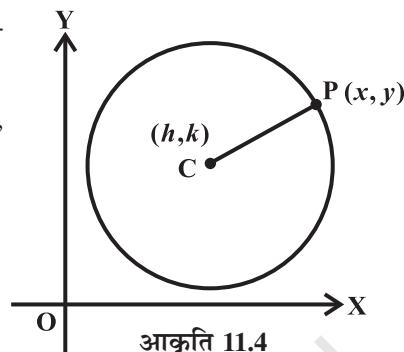
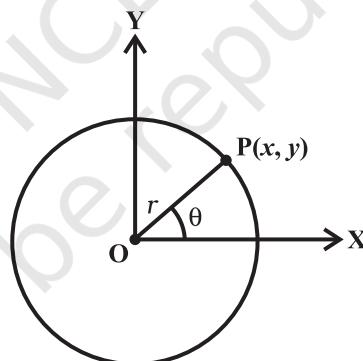
मूल बिन्दु से गुजरने वाले वृत्त का व्यापक समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0$ है।

दो घात वाला व्यापक समीकरण अर्थात् $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ वृत्त को निरूपित करता है यदि (i) x^2 एवं y^2 के गुणांक एक समान हैं अर्थात् $a = b \neq 0$ एवं (ii) xy का गुणांक शून्य हैं अर्थात् $h = 0$.

वृत्त $x^2 + y^2 = r^2$ के प्राचलिक समीकरण $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ हैं, जहाँ θ एक प्राचल है और वृत्त $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ के प्राचलिक समीकरण

$$x - h = r\cos\theta,\ y - k = r\sin\theta$$

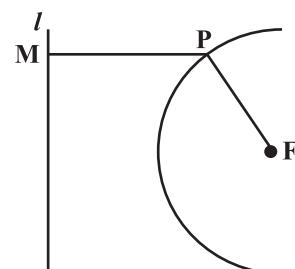
अथवा

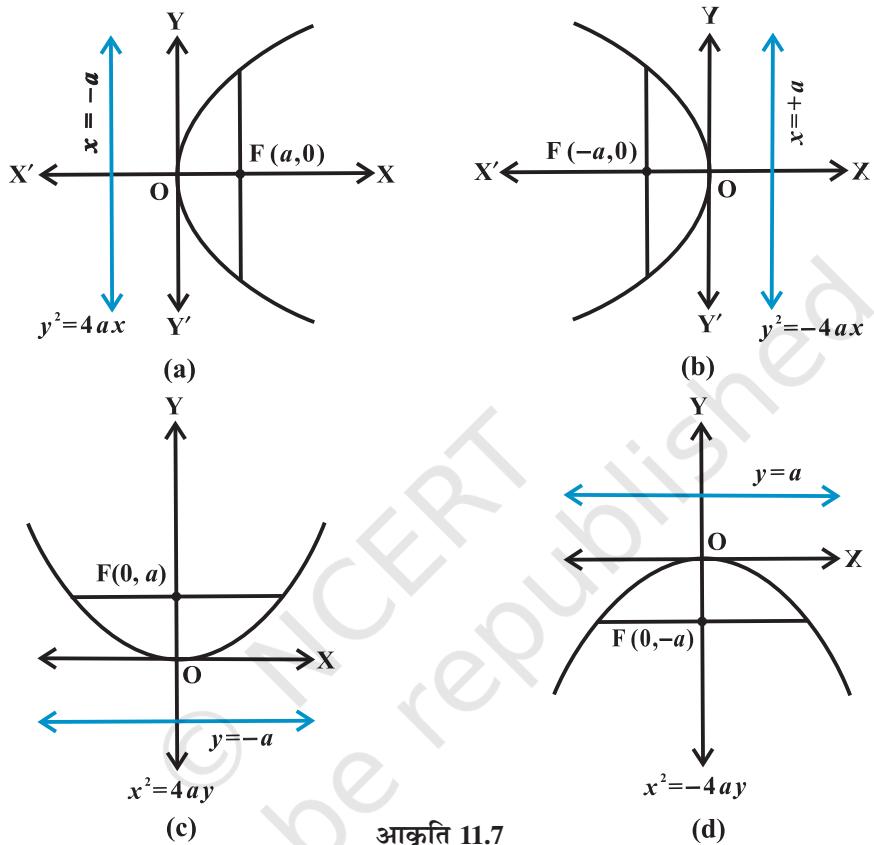
$$x = h + r\cos\theta,\ y = k + r\sin\theta \text{ हैं।}$$

आकृति 11.5

नोट: *वृत्त के व्यापक समीकरण में तीन अचर हैं जो इस बात को दर्शाते हैंकि वृत्त को अद्वितीय रूप में ज्ञात करने के लिए कम से कम तीन प्रतिबंधों की आवश्यकता होती है।*

11.1.3 परवलय (Parabola)

आकृति 11.6

परवलय, तल के उन सभी बिन्दुओं P का समुच्चय है जो तल के एक निश्चित बिन्दु F एवं एक निश्चित सरल रेखा Q से समान दूरी पर है। निश्चित बिन्दु F को परवलय की नाभि कहते हैं और निश्चित रेखा को परवलय की नियता (directrix) कहा जाता है।

परवलय का प्रमाणिक समीकरण (Standard equations of parabola)

आकृति 11.7(a) से (d) तक परवलय के चार सम्भावित रूपों को दर्शाया गया है।

आकृति 11.7

नाभिलंब जीवा (Latus rectum) परवलय की नाभि से जाने वाली और परवलय के अक्ष के लंबवत रेखाखंड जिसके अंत्य बिंदु परवलय पर हों, को परवलय की नाभिलंब जीवा कहते हैं। (आकृति 11.17)

परवलय से सम्बन्धित मुख्य तथ्य

परवलय का रूप	$y^2 = 4ax$	$y^2 = -4ax$	$x^2 = 4ay$	$x^2 = -4ay$
अक्ष	$y = 0$	$y = 0$	$x = 0$	$x = 0$
नियता	$x = -a$	$x = a$	$y = -a$	$y = a$
शीर्ष	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
नाभि	(a, 0)	($-a$, 0)	(0, a)	(0, $-a$)
नाभिलंब जीवा की लम्बाई	$4a$	$4a$	$4a$	$4a$
नाभिलंब जीवा का समीकरण	$x = a$	$x = -a$	$y = a$	$y = -a$

बिन्दु की नाभीय दूरी (Focal distance of a point)

मान लीजिए कि परवलय का समीकरण $y^2 = 4ax$ है और $P(x, y)$ इस पर कोई बिन्दु है। बिन्दु $P(x, y)$ एवं नाभि $(a, 0)$ के बीच की दूरी बिन्दु (P) की नाभीय दूरी कहलाती है।

$$FP = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$
$$= \sqrt{(x-a)^2 + 4ax}$$
$$= \sqrt{(x+a)^2}$$
$$= |x + a|$$

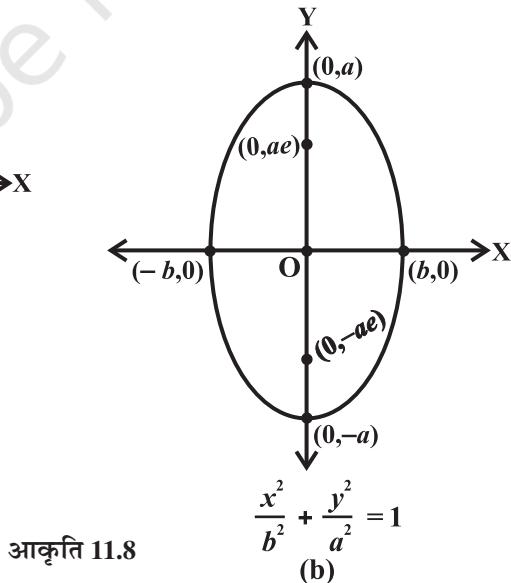
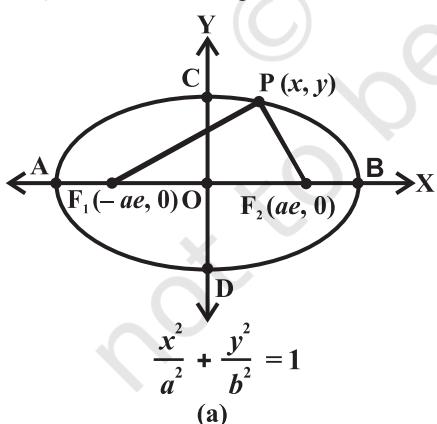
11.1.4 दीर्घवृत्त *(Ellipse)*

एक दीर्घवृत्त तल के उन बिन्दुओं का समुच्चय है, जिसका तल में दो स्थिर बिन्दुओं से दूरियों का योग अचर होता है। विकल्पत: दीर्घवृत्त तल के उन सभी बिन्दुओं का समुच्चय है जिनकी तल के किसी स्थिर बिंदु से दूरी, तल की किसी स्थिर रेखा से दूरी के साथ, एक अचर अनुपात (< 1) धारण करती है। स्थिर बिंदु को नाभि एवं स्थिर रेखा को नियता, कहते हैं अचर अनुपात ($e < 1$) दीर्घवृत्त की उत्केंद्रता कहलाता है। दीर्घवृत्त के दो मानक समीकरण इस प्रकार हैं:

(i) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ और (ii) $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$,

दोनों ही समीकरणों में $a > b$ एवं $b^2 = a^2(1 - e^2)$, $e < 1$

(i) में दीर्घ अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है और लघु-अक्ष, y-अक्ष के अनुदिश है। (ii) में दीर्घ अक्ष, y-अक्ष के अनुदिश है एवं लघु-अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है। आकृति 11.8 (a) और (b)

दीर्घ वृत्त से सम्बन्धित मुख्य तथ्य

आकृति 11.8

दीर्घवृत्त का रूप	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$
	$a > b$	$a > b$
दीर्घ अक्ष का समीकरण	$y = 0$	$x = 0$
दीर्घ अक्ष की लम्बाई	$2a$	$2a$
लघु अक्ष का समीकरण	$x = 0$	$y = 0$
लघु अक्ष की लम्बाई	$2b$	$2b$
नियताएं	$x = \pm \frac{a}{e}$	$y = \pm \frac{a}{e}$
नाभिलंब जीवा का समीकरण	$x = \pm ae$	$y = \pm ae$
नाभिलंब जीवा की लम्बाई	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2b^2}{a}$
केंद्र	$(0, 0)$	$(0, 0)$

नाभीय दूरी

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ के किसी बिन्दु P(x, y) की नाभीय दूरी, नजदीक वाली नाभि से $a - e\,|x|$ है और दूर वाली नाभि से $a + e\,|x|$ है।

दीघवृत्त पर स्थित किसी बिंदु की नाभीय दूरीयों का योग अचर एवं दीर्घ अक्ष की लंबाई के समान होता है।

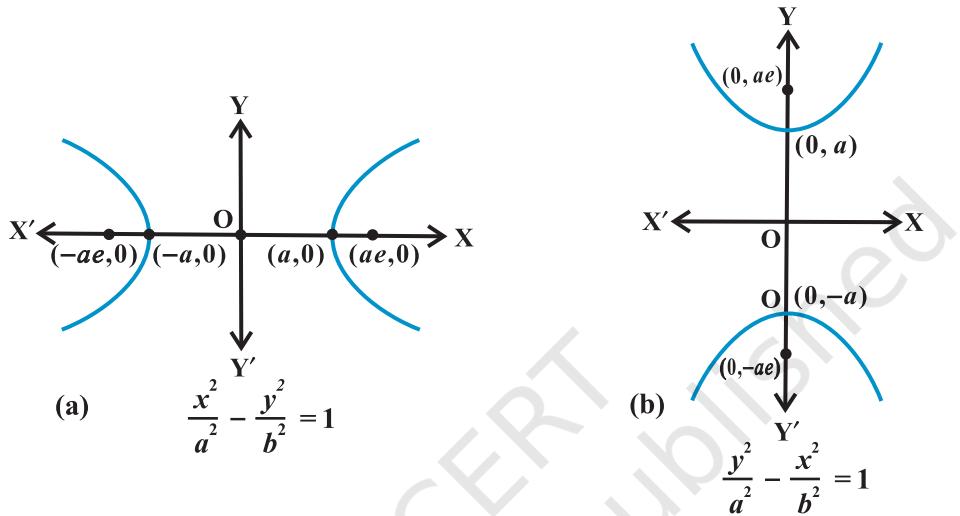
11.1.5 *अतिपरवलय (Hyperbola)*

एक अतिपरवलय, तल के उन सभी बिन्दुओं का समुच्चय है जिनकी तल में दो स्थिर बिन्दुओं से दूरी का अंतर अचर होता है। विकल्पत: अतिपरवलय तल के उन सभी बिन्दुओं का समुच्चय है जिनकी तल के किसी स्थिर बिन्दु से दूरी, तल की किसी स्थिर रेखा से दूरी के साथ, एक अचर अनुपात (>1) बनती है।

स्थिर बिंदु को नाभि, स्थिर रेखा को नियता एवं स्थिर अनुपात $(e > 1)$ को उत्केंद्रता कहते हैं। अतिपरवलय के दो मानक रूप हैं,

(i) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ एवं (ii) $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

यहाँ $b^2 = a^2 (e^2 - 1)$, $e > 1$.

अतिपरवलय (i) का अनुप्रस्थ अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है एवं संयुग्मी अक्ष, y-अक्ष के अनुदिश है। जबकि अतिपरवलय (ii) का अनुप्रस्थ अक्ष, y-अक्ष के अनुदिश है एवं संयुग्मी अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है।

आकृति 11.9

अतिपरवलय से सम्बन्धित मुख्य तथ्य

अतिपरवलय का रूप	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
अनुप्रस्थ अक्ष का समीकरण	$y = 0$	$x = 0$
संयुग्मी अक्ष का समीकरण	$x = 0$	$y = 0$
अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई	$2a$	$2a$
नाभियां	$(\pm ae, 0)$	$(0, \pm ae)$
नाभिलंब जीवा का समीकरण	$x = \pm ae$	$y = \pm ae$
नाभिलंब जीवा की लम्बाई	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2b^2}{a}$
केंद्र	(0, 0)	(0, 0)

नाभीय दूरी

अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ के किसी बिन्दु (x, y) की नाभीय दूरी, नजदीक वाली नाभि से $e\,|\,x\,|-a$ है और दूरी वाली नाभि से $e\,|\,x\,|+a$ है।

अतिपरवलय पर स्थित किसी बिन्दु की नाभीय दूरियों का अन्तर अचर एवं अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई के समान होता है।

शांकवों के प्राचलिक समीकरण (Parametric equation of conics)

	शांकव	प्राचलिक समीकरण
(i)	परवलय : $y^2 = 4ax$	$x = at^2,\ y = 2at;\ -\infty < t < \infty$
(ii)	दीर्घवृत्त : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta;\ 0 \le \theta \le 2\pi$
(iii)	अतिपरवलय : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$x = a\sec\theta,\ y = b\tan\theta$, जहाँ $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}$

11.2 हल किए हुए उदाहरण

लघु उत्तरीय उदाहरण

उदाहरण 1 वृत्त $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 8$ की त्रिज्या एवं केंद्र ज्ञात कीजिए।

हल दिए हुए समीकरण को $(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) = 8$ के रूप में लिखा जा सकता है।

पूर्ण वर्ग बनाने पर हम

$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 8 + 1 + 4$ अथवा

$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 13$, प्राप्त करते हैं। वृत्त के मानक समीकरण के साथ इसकी तुलना करने पर हम देखते हैं कि वृत्त का केंद्र $(1, -2)$ एवं त्रिज्या $\sqrt{13}$ है।

उदाहरण 2 यदि $x^2 = -8y$ किसी परवलय का समीकरण है, तो नाभि के निर्देशांक, नियता का समीकरण और नाभिलंब जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल दिया हुआ समीकरण $x^2 = -4ay$ के रूप का है जिसमें a धनात्मक है।

इसलिए परवलय की नाभि ऋणात्मक y-अक्ष पर है और यह परवलय नीचे की तरफ खुलता है। दिए हुए समीकरण को, मानक रूप से तुलना करने पर हम $a = 2$ प्राप्त करते हैं।

इसलिए नाभि के निर्देशांक (0, –2) हैं। नियता का समीकरण $y = 2$ है एवं नाभिलंब जीवा की लम्बाई $4a$ अर्थात् 8 है।

उदाहरण 3 यदि एक दीर्घवृत्त का समीकरण $9x^2 + 25y^2 = 225$, है, तो दीर्घ अक्ष, लघु अक्ष, उत्केंद्रता, नाभियाँ एवं शीर्ष ज्ञात कीजिए।

हल 225 से भाग करने पर दिए हुए समीकरण को मानक रूप में निम्नलिखित प्रकार लिख सकते हैं:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

इससे हम $a = 5$ एवं $b = 3$ प्राप्त करते हैं। अत: $9 = 25(1 - e^2)$, इसलिए $e = \frac{4}{5}$ क्योंकि x^2 का हर बड़ा है इसलिए दीर्घ अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है एवं लघु-अक्ष, y-अक्ष के अनुदिश है। नाभियाँ (4, 0) एवं (−4, 0) हैं। शीर्ष (5, 0) एवं (−5, 0) हैं।

उदाहरण 4 एक ऐसे दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभियाँ (± 5, 0) पर है और एक नियता का समीकरण $x = \frac{36}{5}$ है।

हल हमें प्राप्त है, $ae = 5$, $\frac{a}{e} = \frac{36}{5}$ जिससे हम $a^2 = 36$ or $a = 6$ इसलिए $e = \frac{5}{6}$

अब $b = a\sqrt{1-e^2} = 6\sqrt{1-\frac{25}{36}} = \sqrt{11}$ अत: दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$ है।

उदाहरण 5 अतिपरवलय $9x^2 - 16y^2 = 144$ के लिए शीर्ष, नाभियां एवं उत्केंद्रता ज्ञात कीजिए।

हल अतिपरवलय का समीकरण $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ के रूप में लिखा जा सकता है। इसलिए $a = 4$, $b = 3$ एवं $9 = 16(e^2 - 1)$ एवं $e^2 = \frac{9}{16} + 1 = \frac{25}{16}$ इस प्रकार $e = \frac{5}{4}$ अत: शीर्ष, $(\pm a, 0) = (\pm 4, 0)$ पर है और नाभियाँ $(\pm ae, 0) = (\pm 5, 0)$ पर हैं।

उदाहरण 6 एक ऐसे अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (0, ± 6) पर हैं एवं $e = \frac{5}{3}$.

हल क्योंकि शीर्ष y-अक्ष पर हैं (मध्य बिन्दु मूल बिन्दु पर है) इसलिए अतिपरवलय का समीकरण $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ है।

क्योंकि शीर्ष (0, ± 6) हैं इसलिए $a = 6, b^2 = a^2 (e^2 - 1) = 36\left(\frac{25}{9} - 1\right) = 64$ अतः अतिपरवलय का अभीष्ट समीकरण $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1$ है और नाभियां $(0, \pm ae) = (0, \pm 10)$ हैं।

दीर्घ उत्तरीय उदाहरण

उदारहण 7 बिन्दुओं (20, 3), (19, 8) और (2, –9) से गुजरने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए। वृत्त का केंद्र एवं त्रिज्या भी ज्ञात कीजिए।

हल दिए हुए निर्देशांकों को वृत्त के व्यापक समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ में प्रतिस्थापित करने पर हम

$$40g + 6f + c = -409$$
$$38g + 16f + c = -425$$
$$4g - 18f + c = -85$$ प्राप्त करते हैं।

इन तीन समीकरणों से हम $g = -7, f = -3$ एवं $c = -111$ प्राप्त करते हैं।

अतः वृत्त का समीकरण

$$x^2 + y^2 - 14x - 6y - 111 = 0$$

अथवा $$(x - 7)^2 + (y - 3)^2 = 13^2$$ है।

इसलिए वृत्त का केंद्र (7, 3) एवं त्रिज्या 13 है।

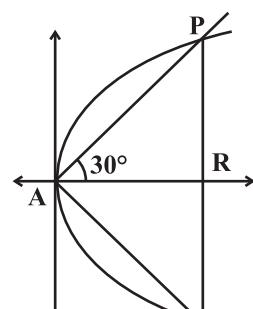
उदाहरण 8 परवलय $y^2 = 4ax$ के अन्तर्गत एक समबाहु त्रिभुज इस प्रकार बनाया जाता है कि त्रिभुज का एक शीर्ष, परवलय के शीर्ष पर है। त्रिभुज की भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है, समबाहु त्रिभुज को APQ से निर्दिष्ट किया गया है जिसकी समान भुजाओं की लम्बाई l है (मान लीजिए)

आकृति 11.10

यहाँ $$AP = l \text{ इसलिए } AR = l\cos 30°$$
$$= l\frac{\sqrt{3}}{2}$$

साथ ही $$PR = l\sin 30° = \frac{l}{2}.$$

अतः $\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}, \frac{l}{2}\right)$, परवलय $y^2 = 4ax$ पर स्थित बिन्दु P के निर्देशांक है।

इसलिए $$\frac{l^2}{4} = 4a \quad \frac{l\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow l = 8\,a\sqrt{3}$$

इस प्रकार, परवलय $y^2 = 4ax$ के अंतर्गत बनाई गई समबाहु त्रिभुज की भुजा की अभीष्ट लम्बाई $8\,a\sqrt{3}$ है।

उदारहण 9 एक ऐसे दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (–3, 1) से जाता है एवं उसकी उत्केंद्रता $\sqrt{\frac{2}{5}}$ है। दीर्घ अक्ष x-अक्ष पर है और केंद्र मूल बिन्दु पर है।

हल मान लीजिए कि बिन्दु (–3, 1) से गुजरने वाले दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ है।

इसलिए, $$\frac{9}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1.$$

अथवा $$9b^2 + a^2 = a^2\ b^2$$

अथवा $$9a^2\ (1^2 - e^2) + a^2 = a^2\ a^2\ (1 - e^2) \quad (\text{Using } b^2 = a^2\ (1 - e^2))$$

अथवा $$a^2 = \frac{32}{3}$$

फिर से $$b^2 = a^2\ (1 - e^2) = \frac{32}{3} \quad 1 - \frac{2}{5} = \frac{32}{5}$$

अतः दीर्घवृत्त का अभीष्ट समीकरण

$$\frac{x^2}{\frac{32}{3}} + \frac{y^2}{\frac{32}{5}} = 1$$

अथवा $$3x^2 + 5y^2 = 32.$$

उदाहरण 10 एक ऐसे अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (± 6, 0) पर है और किसी एक नियता का समीकरण $x = 4$ है।

हल जैसा कि, शीर्ष बिन्दु x-अक्ष पर हैं और उनका मध्य बिन्दु मूल बिन्दु है, इसलिए अतिपरवलय का समीकरण $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ के रूप का होना चाहिए।

यहाँ $b^2 = a^2\ (e^2 - 1)$ शीर्ष $(\pm\, a, 0)$ हैं एवं नियताएं $x = \pm\ \frac{a}{e}$ से प्राप्त होती है।

इस प्रकार $a = 6, \frac{a}{e} = 4$ इसलिए $e = \frac{3}{2}$ जिससे $b^2 = 36 \quad \frac{9}{4} - 1 \quad = 45$ प्राप्त होता है।

परिणामत: अतिपरवलय का अभीष्ट समीकरण $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{45} = 1$ है।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

उदाहरण संख्या 11 से 16 तक प्रत्येक के लिए चार सम्भावित विकल्प हैं, जिनमें से एक सही है। दिए गये चार विकल्पों में से सही उत्तर का चयन कीजिए

उदाहरण 11 मूल बिन्दु से 1 इकाई की दूरी पर प्रत्येक निर्देशांक अक्ष को स्पर्श करने वाले वृत्त का प्रथम चतुर्थांश में समीकरण है:

(A) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ (B) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$

(C) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ (D) $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$

हल सही विकल्प (A) है। क्योंकि दिया हुआ समीकरण $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ के रूप में लिखा जा सकता है। यह समीकरण एक ऐसे वृत्त को निरूपित करता है जिसका केंद्र (1, 1) है, एवं त्रिज्या 1 ईकाई है। यह वृत्त दोनों अक्षों का मूल बिन्दु से 1 ईकाई की दूरी पर स्पर्श करता है।

उदाहरण 12 रेखाओं $3x + y = 14$ एवं $2x + 5y = 18$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से जाने वाले उस वृत का समीकरण जिसका केंद्र (1,–2) है।

(A) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ (B) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$

(C) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ (D) $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$

हल सही विकल्प (A) है, $3x + y - 14 = 0$ एवं $2x + 5y - 18 = 0$ का प्रतिच्छेद बिन्दु $x = 4, y = 2$ अर्थात् (4, 2) है।

इसलिए वृत्त की त्रिज्या $= \sqrt{9 + 16} = 5$

अत: वृत्त का समीकरण

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$$

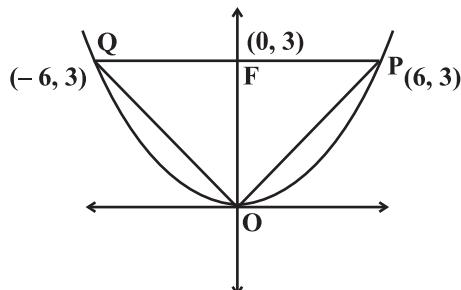
अथवा $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ है।

उदारहण 13 परवलय $x^2 = 12y$ के शीर्ष को नाभिलम्ब जीवा के अंत्य बिन्दुओं से मिलाने पर बने त्रिभुज का क्षेत्रफल है।

(A) 12 वर्ग इकाई (C) 18 वर्ग इकाई

(B) 16 वर्ग इकाई (D) 24 वर्ग इकाई

हल सही विकल्प (C) है, आकृति में OPQ उस त्रिभुज को निरूपित करता है जिसका क्षेत्रफल ज्ञात करना है।

$= \frac{1}{2} \text{PQ} \times \text{OF} = \frac{1}{2} (12 \times 3) = 18$ वर्ग इकाई

आकृति 11.11

उदाहरण 14 परवलय $y^2 = 6x$ के शीर्ष को इसके ऐसे बिन्दुओं, जिनका भुज (x-निर्देशांक) 24 है, से मिलाने पर, प्राप्त रेखाओं के समीकरण हैं –

(A) $y \pm 2x = 0$

(B) $2y \pm x = 0$

(C) $x \pm 2y = 0$

(D) $2x \pm y = 0$

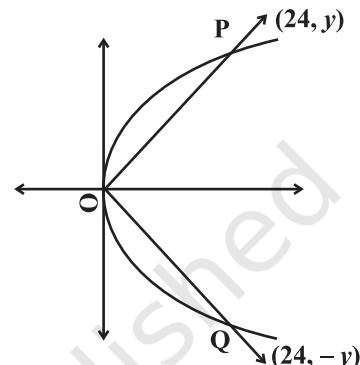
आकृति 11.12

हल सही विकल्प (B) है। मान लीजिए परवलय $y^2 = 6x$ पर P एवं Q दो बिन्दु है जिनके भुज 24 हैं और O को P एवं Q से मिलाने पर OP, OQ दो रेखाएँ हैं।

अत: $y^2 = 6 \times 24 = 144$

अथवा $y = \pm 12.$

इसलिए P एवं Q के निर्देशांक क्रमश: (24, 12) एवं (24, –12) हैं।

अत: $y = \pm \frac{12}{24} x \quad 2y \quad x$ अभीष्ट रेखाएं है।

उदारहण 15 एक दीर्घ वृत्त का केंद्र मूल बिन्दू है एवं दीर्घ अक्ष, x-अक्ष पर है, यह बिन्दुओं (–3, 1) एवं (2, –2) से जाता है। उस दीर्घवृत्त का समीकरण हैं:

(A) $5x^2 + 3y^2 \quad 32$

(B) $3x^2 + 5y^2 = 32$

(C) $5x^2 - 3y^2 = 32$

(D) $3x^2 + 5y^2 + 32 = 0$

हल (B) सही विकल्प है। मान लीजिए, दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ है। दिए हुए प्रतिबंधों के अनुसार, $\frac{9}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$ एवं $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{4}$

इनसे हमें $a^2 = \frac{32}{3}$ एवं $b^2 = \frac{32}{5}$ प्राप्त होता है। दीर्घ वृत्त का अभीष्ट समीकरण $3x^2 + 5y^2 = 32$ है।

उदारहण 16 एक अतिपरवलय का केंद्र मूल बिन्दु पर है एवं इसके अनुप्रस्थ अक्ष जो x-अक्ष के अनुदिश है, की लम्बाई 7 है। यह अतिपरवलय बिन्दु (5, –2) से जाता है। अतिपरवलय का समीकरण है:

(A) $\frac{4}{49}x^2 - \frac{196}{51}y^2 = 1$

(B) $\frac{49}{4}x^2 - \frac{51}{196}y^2 = 1$

(C) $\frac{4}{49}x^2 - \frac{51}{196}y^2 = 1$

(D) इनमें से कोई नहीं

हल सही विकल्प (C) है। मान लीजिए $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ अतिपरवलय को निरूपित करता है। दिए हुए प्रतिबंधों के अनुसार अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई अर्थात् $2a = 7 \Rightarrow a = \frac{7}{2}$ यह भी दिया हुआ है कि बिन्दु (5, –2) अतिपरवलय पर स्थित है। इसलिए हम

$$\frac{4}{49}(25)-\frac{4}{b^2}=1$$ प्राप्त करते हैं। इससे हमें

$b^2=\frac{196}{51}$ प्राप्त होता है। अतः अतिपरवलय का समीकरण

$\frac{4}{49}x^2-\frac{51}{196}y^2=1$ है।

बताइए उदारहण 17 एवं 18 में दिए हुए कथन सत्य है अथवा नहीं। उत्तर की पुष्टि कीजिए।

उदारहण 17 एक वृत्त पर किसी भी बिंदु के निर्देशांक $(2 + 4\cos\theta, -1 + 4\sin\theta)$ है, जहाँ θ प्राचल है। उस वृत्त का समीकरण $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$ है।

हल सत्य, दिए हुए प्रतिबंधों से हम

$$x = 2 + 4\cos\theta \Rightarrow (x-2) = 4\cos\theta$$

अथवा $y = -1 + 4\sin\theta \Rightarrow y + 1 = 4\sin\theta$. प्राप्त करते हैं। वर्ग करने पर एवं जोड़ने पर हमें

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$ प्राप्त होता है।

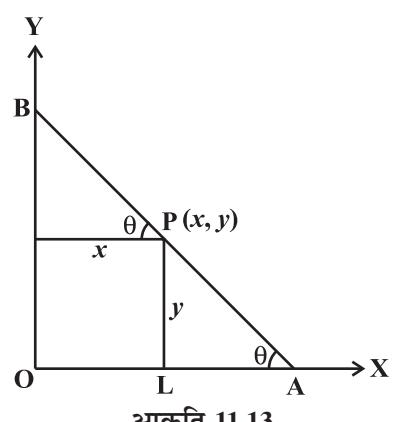
उदाहरण 18 दी हुई लम्बाई की एक छड़ इस प्रकार घूमती है कि इसके अन्तिम छोर, परस्पर लंब दो निश्चित सरल रेखाओं पर ही रहते हैं। छड़ पर लिया हुआ कोई भी बिन्दु दीर्घवृत्त को दर्शाता है।

हल सत्य, मान लीजिए, सलाख पर कोई बिंदु $P(x, y)$ इस प्रकार है कि $PA = a$ एवं $PB = b$ आकृति 11.13.

$$x = OL = b\cos\theta$$

एवं $$y = PL = a\sin\theta$$

इनसे हमें $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2} = 1$, प्राप्त होता है और यह एक दीर्घवृत्त है।

आकृति 11.13

उदारहण संख्या 19 से 23 में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

उदारहण 19 बिन्दु (2, 2) पर केंद्र एवं बिन्दु (4, 5) से जाने वाले वृत्त का समीकरण ________ है।

हल क्योंकि वृत्त (4, 5) से जाता है और इसका केंद्र (2, 2) है इसलिए इसकी त्रिज्या $\sqrt{(4-2)^2+(5-2)^2}=\sqrt{13}$ है। अत: अभीष्ट उत्तर $(x-2)^2+(y-2)^2=13$ है।

उदारहण 20 एक वृत्त की त्रिज्या 3 ईकाई है और इसका केंद्र रेखा, $y = x - 1$ पर स्थित है। यदि यह वृत्त बिन्दु (7, 3) से जाता है, तो इसका समीकरण ________ है।

हल: मान लीजिए वृत्त का केंद्र (h, k) है। तब $k = h - 1$ इसलिए वृत्त का समीकरण

$$(x-h)^2+[y-(h-1)]^2=9 \qquad \dots (1)$$

दिया हुआ है कि वृत्त का केंद्र (7, 3) से जाता है इसलिए हम,

$$(7-h)^2+(3-(h-1))^2 = 9$$

अथवा $(7-h)^2+(4-h)^2 = 9$

अथवा $h^2-11h+28 = 0$ प्राप्त करते हैं।

अथवा $(h-7)(h-4) = 0 \quad \Rightarrow h = 4$ अथवा $h = 7$

अत: वृत्त के अभीष्ट समीकरण, $x^2+y^2-8x-6y+16=0$

अथवा $x^2+y^2-14x-12y+76 = 0$

उदाहरण 21 एक दीर्घवृत्त का अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है और इसका केंद्र मूल बिन्दु पर है। इसके नाभिलंब जीवा की लम्बाई 10 इकाई है। यदि नाभियों के बीच की दूरी = लघु अक्ष की लम्बाई, तो दीर्घवृत्त का समीकरण ________ है।

हल दिया हुआ है कि $\frac{2b^2}{a}=10$ एवं $2ae = 2b \Rightarrow b = ae$

हम यह भी जानते हैं कि $b^2 = a^2(1-e^2)$

अथवा $2a^2e^2 = a^2 \Rightarrow e = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ($b = ae$ प्रयोग करने पर)

अत: $a = b\sqrt{2}$

फिर से $\frac{2b^2}{a} = 10$

अथवा $b = 5\sqrt{2}$ इस प्रकार हम $a = 10$ प्राप्त करते हैं।

अत: दीर्घवृत्त का अभीष्ट समीकरण $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{50}=1$ है।

उदाहरण 22 एक परवलय की नाभि, बिन्दु (2, 3) है एवं रेखा $x - 4y + 3 = 0$ उसकी नियता है। उस परवलय का समीकरण __________ है।

हल परवलय की परिभाषा का उपयोग करते हुए हम

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = \left|\frac{x-4y+3}{\sqrt{17}}\right|$$ प्राप्त करते हैं।

$$17\,(x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13) = x^2 + 16y^2 + 9 - 8xy - 24y + 6x$$

अथवा $16x^2 + y^2 + 8xy - 74x - 78y + 212 = 0$ प्राप्त होता है।

उदारहण 23 बिन्दुओं (3, 0) एवं $(3\sqrt{2}, 2)$ से जाने वाले अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ की उत्केंद्रता __________ है।

हल दिया हुआ है कि अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ बिन्दुओं (3, 0) एवं $(3\sqrt{2}, 2)$ से जाता है इसलिए हम $a^2 = 9$ एवं $b^2 = 4$ प्राप्त करते हैं।
इससे हमें $b^2 = a^2\,(e^2 - 1)$ अथवा

$$4 = 9\,(e^2 - 1)$$

अथवा $$e^2 = \frac{13}{9}$$

अथवा $$e = \frac{\sqrt{13}}{3}$$ प्राप्त होता है।

11.3 प्रश्नावली

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. एक वृत्त की त्रिज्या a है और यह प्रथम चतुर्थांश में दोनों अक्षों को स्पर्श करता है, वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।
2. दर्शाइए कि $x = \frac{2at}{1+t^2}$ एवं $y = \frac{a\,(1-t^2)}{1+t^2}$ द्वारा देय बिन्दु (x, y), t के सभी वास्तविक मानों के लिए एक वृत्त पर स्थित है जहाँ a कोई भी दी हुई वास्तविक संख्या है और $-1 \le t \le 1$.
3. यदि कोई वृत्त बिन्दुओं $(0, 0)$, $(a, 0)$ एवं $(0, b)$ से जाता है तो इसके केंद्र के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
4. ऐसे वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो x-अक्ष को स्पर्श करता है और जिसका केंद्र (1, 2) है।

5. यदि रेखाएं $3x - 4y + 4 = 0$ एवं $6x - 8y - 7 = 0$ एक वृत्त की स्पर्श रेखाएं हैं, तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

[**संकेत:** दी हुई समांतर रेखाओं के बीच की दूरी से हम वृत्त का व्यास प्राप्त करते हैं]

6. तीसरे चतुर्थांश में स्थित एक ऐसे वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो दोनों अक्षों एवं रेखा $3x - 4y + 8 = 0$ को स्पर्श करता है।

[**संकेत:** माना a वृत की त्रिज्या है, तब $(-a, -a)$ वृत के केंद्र होंगे और दी गई रेखा की केंद्र से लम्ब दूरी, वृत की त्रिज्या है।

7. यदि वृत्त $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0$ के व्यास एक छोर $(3, 4)$, पर है, तो व्यास के दूसरे छोर के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

8. एक वृत्त का केंद्र $(1, -2)$ पर है और यह $3x + y = 14$, $2x + 5y = 18$ से जाता है। वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

9. यदि रेखा $y = \sqrt{3}\ x + k$ वृत्त $x^2 + y^2 = 16$ को स्पर्श करती है, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

[**संकेत:** वृत की त्रिज्या वृत के केंद्र से लम्ब दूरी के बराबर है।]

10. वृत्त $x^2 + y^2 - 6x + 12y + 15 = 0$ के संकेंद्री एवं इससे दुगने क्षेत्रफल के वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

[**संकेत:** सकेंद्री वृतों के केंद्र समान होते हैं।]

11. यदि किसी दीर्घ वृत्त की नाभिलंब जीवा, लघु अक्ष के आधे के समान हैं, तो इसकी उत्केंद्रता ज्ञात कीजिए।

12. दिये गये दीर्घ वृत्त $9x^2 + 25y^2 = 225$ की उत्केंद्रता एवं नाभियां ज्ञात कीजिए।

13. यदि किसी दीर्घवृत्त की उत्केंद्रता $\frac{5}{8}$ है और नाभियों के बीच की दूरी 10 है, तो दीर्घवृत्त की नाभिलंब जीवा ज्ञात कीजिए।

14. एक दीर्घ वृत्त की उत्केंद्रता $\frac{2}{3}$ है, नाभिलंब जीवा 5 है एवं केंद्र $(0\ ,\ 0)$ है। दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

15. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ की नियताओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

16. परवलय $y^2 = 8x$ पर किसी बिन्दु की नाभीय दूरी 4 है। उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

17. परवलय $y^2 = 4ax$ के शीर्ष एवं परवलय पर स्थित किसी बिन्दु को मिलाने वाले रेखाखंड की लम्बाई ज्ञात कीजिए। यदि रेखाखंड x-अक्ष के साथ θ कोण बनाता है।

18. यदि एक परवलय का शीर्ष एवं नाभि क्रमशः $(0, 4)$ एवं $(0, 2)$ पर हैं, तो उसका समीकरण ज्ञात कीजिए।

19. यदि रेखा $y = mx + 1$ परवलय $y^2 = 4x$ की स्पर्श रेखा है, तो m का मान ज्ञात कीजिए।
[**संकेत:** परवलय एवं रेखा के समीकरण को हल करने पर हमें एक द्विघात समीकरण प्राप्त होता है और स्पर्शिता के प्रतिबंध का उपयोग करने पर m का मान प्राप्त होता है।]

20. यदि एक अतिपरवलय की उत्केंद्रता $\sqrt{2}$ है और इसकी नाभियों के बीच की दूरी 16 हैं, तो अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए।

21. अतिपरवलय $9y^2 - 4x^2 = 36$ की उत्केंद्रता ज्ञात कीजिए।

22. एक अतिपरवलय की उत्केंद्रता $\frac{3}{2}$ है और इसकी नाभियाँ $(\pm 2, 0)$ पर हैं, अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

23. यदि रेखाएं $2x - 3y = 5$ एवं $3x - 4y = 7$ किसी ऐसे वृत्त के व्यास हैं जिसका क्षेत्रफल 154 वर्ग इकाई है, तो वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

24. एक वृत्त का केंद्र सरल रेखा $y - 4x + 3 = 0$ पर स्थित हैं और यह वृत्त बिन्दुओं $(2, 3)$ एवं $(4, 5)$ से होकर जाता है। वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

25. एक ऐसे वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र $(3, -1)$ है और जो रेखा $2x - 5y + 18 = 0$ से 6 इकाई लम्बी एक जीवा काटता है।
[**संकेत:** वृत्त की त्रिज्या ज्ञात करने के लिए, केंद्र से दी हुई रेखा पर लंब दूरी ज्ञात कीजिए।]

26. 5 सेमी त्रिज्या वाले एक ऐसे वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो एक दूसरे वृत्त $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ को $(5, 5)$ पर स्पर्श करता है।

27. 3 इकाई त्रिज्या वाला एक वृत्त बिन्दु $(7, 3)$ से जाता है और इसका केंद्र रेखा $y = x - 1$ पर स्थित है। वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

28. निम्नलिखित परवलयों में से प्रत्येक का समीकरण ज्ञात कीजिए।

(a) नियता $x = 0$, नाभि $(6, 0)$ (b) शीर्ष $(0, 4)$, नाभि $(0, 2)$

(c) नाभि $(-1, -2)$, नियता $x - 2y + 3 = 0$

29. उन सभी बिन्दुओं के समुच्चय का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिनकी बिन्दुओं $(3, 0)$ एवं $(9, 0)$ से दूरियों का योग 12 है।

30. उन सभी बिन्दुओं के समुच्चय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिनकी बिन्दु $(0, 4)$ से दूरी, रेखा $y = 9$ से दूरी का $\frac{2}{3}$ है।

31. दर्शाइए कि ऐसे सभी बिन्दुओं का समुच्चय, जिनकी $(4, 0)$ एवं $(-4, 0)$ से दूरी का अन्तर हमेंशा 2 है, एक अतिपरवलय को निरूपित करता है।

32. अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए यदि दिया हुआ है:

(a) शीर्ष (± 5, 0), नाभि (± 7, 0) (b) शीर्ष (0, ± 7), $e = \frac{4}{3}$

(c) नाभि (0, ± $\sqrt{10}$), बिन्दु (2, 3) से जाता है।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

बताइए कि प्रश्न संख्या 33 से 40 तक के कथनों में से कौन-सा कथन सत्य है और कौन-सा असत्य है?

33. रेखा $x + 3y = 0$, वृत्त $x^2 + y^2 + 6x + 2y = 0$ का व्यास है।

34. बिन्दु (2, –7) से वृत्त $x^2 + y^2 - 14x - 10y - 151 = 0$ की न्यूनतम दूरी 5 इकाई है।

[**संकेत:** न्यूनतम दूरी त्रिज्या एवं केंद्र से दिए हुए बिन्दु के बीच की दूरी का अंतर है]

35. यदि रेखा $lx + my = 1$, वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ की स्पर्श रेखा है, तो बिन्दु (l, m) वृत्त पर स्थित हैं।

[**संकेत:** केंद्र से रेखा की दूरी, वृत्त की त्रिज्या के समान है।]

36. बिन्दु (1, 2) वृत्त $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$ के अन्दर स्थित हैं।

37. रेखा $lx + my + n = 0$, परवलय $y^2 = 4ax$ को स्पर्श करेगी यदि $ln = am^2$.

38. यदि P दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ पर एक बिन्दु है जबकि S एवं S′ दीर्घवृत्त की नाभियाँ है, तो PS + PS′ = 8.

39. रेखा $2x + 3y = 12$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 2$ को बिन्दु (3, 2) पर स्पर्श करती है।

40. रेखाओं $\sqrt{3}x - y - 4\sqrt{3}k = 0$ एवं $\sqrt{3}kx + ky - 4\sqrt{3} = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ k के विभिन्न मानों के लिए एक ऐसा अतिपरवलय है जिसकी उत्केंद्रता 2 है।

[**संकेत :** दिए हुए समीकरणों में से k को विलुप्त कीजिए।]

प्रश्न संख्या 41 से 46 तक रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

41. एक वृत्त का केंद्र (3, –4) है और यह रेखा $5x + 12y - 12 = 0$ को स्पर्श करता है। वृत्त का समीकरण ________ है।

[**संकेत:** वृत त्रिज्या, वृत्त के केंद्र से स्पर्श रेखा की लम्ब दूरी है।]

42. रेखाएँ $y = x + 2$, $3y = 4x$ और $2y = 3x$ किसी त्रिभुज की भुजाएँ हैं। इस त्रिभुज को परिगत (Circumscribing) करने वाला वृत्त का समीकरण ________________ है।

43. एक अंतहीन रस्सी को दो पिनों के ऊपर से निकालकर एक दीर्घवृत्त का निर्धारण किया जाता है। यदि अक्षों की लम्बाई 6 सेमी एवं 4 सेमी हैं, तो रस्सी की लम्बाई एवं पिनों के बीच की दूरी ____________है।

44. एक दीर्घवृत्त की नाभियाँ (0, 1), (0, –1) है और लघु अक्ष की लम्बाई 1 इकाई है। दीर्घ वृत्त का समीकरण ______________ है।

45. एक परवलय की नाभि (–1, –2) पर है और नियता $x - 2y + 3 = 0$ है। परवलय का समीकरण ____________ है।

46. एक अतिपरवलय के शीर्ष $(0, \pm 6)$ पर हैं और उत्केंद्रता $\frac{5}{3}$ है। अति परवलय का समीकरण एवं नाभियां क्रमशः ______________ एवं ________________ हैं।

प्रश्न संख्या 47 से 59 तक दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर का चयन कीजिए –

47. बिन्दु (1, 2) पर केन्द्रित एवं बिन्दु (4, 6) से जाने वाले वृत्त का क्षेत्रफल है:–

(A) 5π (B) 10π (C) 25π (D) इनमें से कोई नहीं

48. दोनों अक्षों को स्पर्श करने वाले एवं बिन्दु (3, 6) से जाने वाले वृत्त का समीकरण है:–

(A) $x^2 + y^2 + 6x + 6y + 3 = 0$ (B) $x^2 + y^2 - 6x - 6y - 9 = 0$

(C) $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$ (D) इनमें से कोई नहीं

49. यदि एक वृत्त मूल बिन्दु एवं बिन्दु (2, 3) से जाता है और उसका केंद्र y-अक्ष पर है, तो वृत्त का समीकरण है:–

(A) $x^2 + y^2 + 13y = 0$ (B) $3x^2 + 3y^2 + 13x + 3 = 0$

(C) $6x^2 + 6y^2 - 13x = 0$ (D) $x^2 + y^2 + 13x + 3 = 0$

50. एक वृत्त का केंद्र मूल बिन्दु पर है और यह एक ऐसे समबाहु त्रिभुज के शीर्षों से जाता है जिसकी माध्यिका की लम्बाई $3a$ है। वृत्त का समीकरण है–

(A) $x^2 + y^2 = 9a^2$ (B) $x^2 + y^2 = 16a^2$

(C) $x^2 + y^2 = 4a^2$ (D) $x^2 + y^2 = a^2$

[**संकेत:** त्रिभुज का केंद्रक और वृत्त का केंद्र संपाती है। वृत्त की त्रिज्या, माध्यिका की लम्बाई का $\frac{2}{3}$ गुना है।]

51. यदि किसी परवलय की नाभि (0, –3) है और इसकी नियता $y = 3$ है, तो इसका समीकरण है:

(A) $x^2 = -12y$ (B) $x^2 = 12y$ (C) $y^2 = -12x$ (D) $y^2 = 12x$

52. यदि परवलय $y^2 = 4ax$, बिन्दु (3, 2) से जाता है, तो इसके नाभिलंब जीवा की लम्बाई है:

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) 4

53. यदि एक परवलय का शीर्ष, बिन्दु (–3, 0) है और नियता, रेखा $x + 5 = 0$ है, तो इसका समीकरण है:

(A) $y^2 = 8 (x + 3)$ (B) $x^2 = 8 (y + 3)$

(C) $y^2 = - 8 (x + 3)$ (D) $y^2 = 8 (x + 5)$

54. एक दीर्घवृत्त की नाभि (1, –1), नियता $x - y - 3 = 0$ और उत्केंद्रता $\frac{1}{2}$ है। दीर्घवृत्त का समीकरण है:

(A) $7x^2 + 2xy + 7y^2 - 10x + 10y + 7 = 0$

(B) $7x^2 + 2xy + 7y^2 + 7 = 0$

(C) $7x^2 + 2xy + 7y^2 + 10x - 10y - 7 = 0$

(D) इसमें से कोई नहीं

55. दीर्घ वृत्त $3x^2 + y^2 = 12$ के नाभिलंब जीवा की लम्बाई हैं:

(A) 4 (B) 3 (C) 8 (D) $\frac{4}{\sqrt{3}}$

56. यदि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a < b)$, की उत्केंद्रता e है, तो

(A) $b^2 = a^2 (1 - e^2)$ (B) $a^2 = b^2 (1 - e^2)$

(C) $a^2 = b^2 (e^2 - 1)$ (D) $b^2 = a^2 (e^2 - 1)$

57. एक अति परवलय के नाभिलंब जीवा की लम्बाई 8 इकाई है और इसका संयुग्मी अक्ष नाभियों के बीच की दूरी के आधे के समान है। उस अतिपरवलय की उत्केंद्रता है:

(A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ (C) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (D) इनमें से कोई नहीं है

58. एक अतिपरवलय की नाभियों के बीच की दूरी 16 है और इसकी उत्केंद्रता $\sqrt{2}$ है। अतिपरवलय का समीकरण है:

(A) $x^2 - y^2 = 32$ (B) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ (C) $2x - 3y^2 = 7$ (D) इनमें से कोई नहीं

59. यदि एक अतिपरवलय की उत्केंद्रता $\frac{3}{2}$ है और नाभियां $(\pm 2, 0)$ पर हैं, तो अतिपरवलय का समीकरण है:

(A) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = \frac{4}{9}$ (B) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = \frac{4}{9}$ (C) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ (D) इनमें से कोई नहीं है